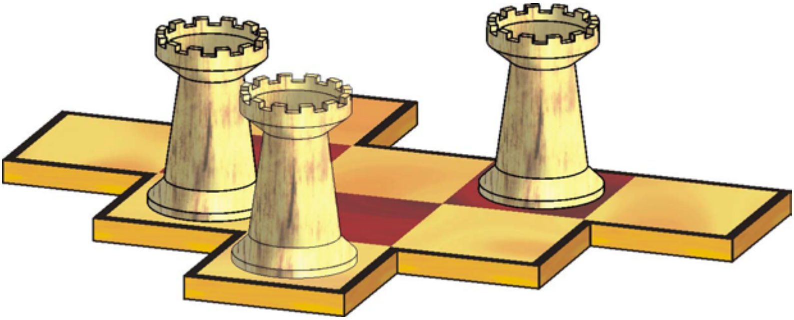
Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 26

К. П. Кохась

ЛАДЕЙНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2003

УДК 519.113/.118
ББК 22.19
К75

Аннотация

В брошюре рассказано о популярном и очень наглядном комбинаторном объекте: ладейных числах и ладейных многочленах. Рассмотрены всевозможные неравенства между ладейными числами. Отталкиваясь от комбинаторных наблюдений, доказана основная теорема о том, что ладейный многочлен любой доски имеет только вещественные корни. Это позволяет вывести много новых, неожиданных с точки зрения комбинаторики неравенств. Вместе с тем, некоторые комбинаторные неравенства ещё ждут своих аналитических доказательств. Текст брошюры может рассматриваться как обзор элементарных результатов о ладейных многочленах.

Текст брошюры представляет собой дополненную обработку записи лекции для школьников 9—11 классов, прочитанной автором на Малом мехмате МГУ 21 декабря 2002 года.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов, учителей.

Работа автора над брошюрой поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (*грант* № 02—01—00093).

Издание осуществлено при поддержке Московского департамента образования и Московской городской Думы.

ISBN 5-94057-114-X

Константин Петрович Кохась.

Ладейные числа и многочлены.

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 26).
М.: МЦНМО, 2003. — 20 с.: ил.

Редактор *Ю. Л. Притыкин.* Техн. редактор *М. Ю. Панов.*

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 8/VIII 2003 года.
Формат бумаги $60\times 88\ {}^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Физ. печ. л. 1,25.
Усл. печ. л. 1,22. Уч.-изд. л. 1,24. Тираж 3000 экз. Заказ 3040.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ».
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

§ 1. ЛАДЕЙНЫЕ ЧИСЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРИМЕРЫ

Рассмотрим обычную шахматную доску и обычную шахматную фигуру — ладью. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску две ладьи так, чтобы они не били друг друга? Какое наибольшее число ладей можно поставить на доску так, чтобы каждая ладья била не более двух других? Можно задать много подобных вопросов, наверняка читатель встречал такого рода задачи на олимпиадах или в книжках по развлекательной математике (см., например, книгу [1]).

Вопросы, о которых пойдёт речь в этой брошюре, являются естественными обобщениями задач о расстановке ладей. Мы рассмотрим произвольные доски и обсудим многочисленные свойства ладейных чисел. Для начала несколько определений.

Пусть дана бесконечная клетчатая плоскость. *Доской* будем называть произвольный конечный набор клеток этой плоскости. *Ладья* — это фигура, которая держит под боем все клетки плоскости, находящиеся с ней на одной горизонтали или на одной вертикали.

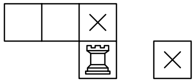


Рис. 1

Таким образом, для досок сложной формы ладья может держать под боем клетки, отделённые от неё клетками, не принадлежащими доске. Так, на рис. 1 изображена несвязная доска из пяти клеток, ладья и клетки, находящиеся под боем этой ладьи (отмечены крестиками).

Зафиксируем произвольную доску B и для каждого натурального n вычислим количество различных способов поставить на эту доску n не бьющих друг друга ладей. Обозначим это количество r_n или $r_n(B)$, если нужно указать, о какой именно доске идёт речь. Положим по определению $r_0=1$. Числа r_0, r_1, r_2, ... называются *ладейными числами* доски B.

Очевидно, что $r_1(B)=S$, где S — площадь (количество клеток) доски B.

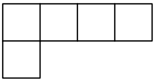
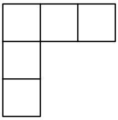
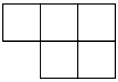
Если же мы хотим разместить на доске слишком много ладей — больше S — у нас ничего не получится: все ладьи не поместятся на нашу доску. Таким образом, для любой доски ладейные числа с большими номерами равны нулю.

В таблице на рис. 2 приведены примеры досок, состоящих из пяти клеток, и все их ненулевые ладейные числа. Заметим, что доски разной формы могут иметь одинаковые наборы ладейных чисел.

|| **1.** Проверьте данные таблицы на рис. 2 *).

Для вычисления ладейных чисел часто хватает несложных комбинаторных соображений. Найдём, например, чему равно

*) Двумя чертами слева выделены упражнения для самостоятельного решения.

Доски	r_0	r_1	r_2	r_3
	1	5		
	1	5	3	
  	1	5	4	

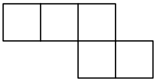
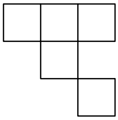
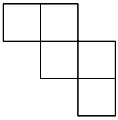
Доски	r_0	r_1	r_2	r_3
	1	5	5	
	1	5	5	1
	1	5	6	1

Рис. 2

число r_3 для обычной шахматной доски 8×8. Трёх ладей на доске 3×3 можно расставить $3!$ способами. Чтобы расставить трёх ладей на доске 8×8, достаточно сначала выбрать три вертикали и три горизонтали — это можно сделать $(C_8^3)^2$ способами, а потом на образовавшейся доске 3×3 взять одну из шести расстановок. Итак, для шахматной доски $r_3=6\cdot7^2\cdot8^2$.

Приведём ещё один пример.

Лемма I. Пусть имеется доска B и $c\in B$ — произвольная клетка. Пусть Крест(c) — это множество клеток доски B, лежащих на той же горизонтали или в той же вертикали, что и клетка c. Тогда

$$r_k(B)=r_k(B\setminus c)+r_{k-1}(B\setminus\text{Крест}(c)). \qquad (1)$$

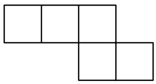
(Здесь мы используем обычные обозначения: $B\setminus c$ — это доска, полученная из B удалением клетки c.)

Доказательство очевидно: поставить k ладей на доску B можно либо разместив их так, чтобы клетка c осталась свободной (это можно сделать $r_k(B\setminus c)$ способами), либо поставив одну ладью в клетку c, тогда остальные придётся ставить вне креста клетки c (это можно сделать как раз $r_{k-1}(B\setminus\text{Крест}(c))$ способами).

Заметим, что утверждение леммы I показывает, как можно вычислить ладейные числа какой-нибудь доски, если известны ладейные числа меньших досок. Таким образом, на самом деле равенство (1) — это рекуррентная формула, с помощью которой мы можем вычислять ладейные числа любой доски B (лучше на компьютере), не пользуясь никакими комбинаторными идеями. Правда, придётся накопить довольно много информации о ладейных числах досок, которые содержатся в B. Примеры других рекуррентных формул мы встретим в § 3.

Теперь, когда мы убедились, что вычисление ладейных чисел — задача в принципе решаемая, введём ещё одно понятие. Две доски назовём *эквивалентными*, если наборы ладейных чисел у этих досок совпадают. Примеры эквивалентных досок можно видеть в таблице на рис. 2.

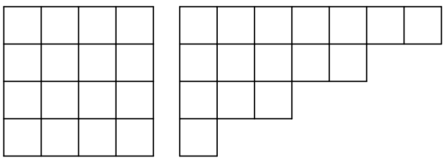
Изучая ладейные числа различных досок, хотелось бы научиться для каждой доски подбирать эквивалентную доску «достаточно простой» формы. Естественный и простой способ преобразовать доску так, чтобы её ладейные числа не изменились, состоит в перестановке вертикальных или горизонтальных рядов клеток, составляющих эту доску. Так, для доски на рис. 1, переставляя вертикальный ряд клеток, содержащий изолированную клетку, «поближе» к «основной части» доски, мы можем получить связную доску

 ,

что, по-видимому, можно рассматривать как «упрощение» формы. Другими естественными операциями над досками, сохраняющими ладейные числа, являются поворот на $\pm 90^\circ$ или 180° и отражения доски относительно вертикали, горизонтали или диагонали.

Хотя эти операции и позволяют изменять форму доски, добиться «совсем простой» формы, пользуясь этими или ещё какими-нибудь операциями, видимо, не удастся, что видно уже на примере всё тех же пятиклеточных досок. Но всё же мы будем рассматривать достаточно богатый класс досок относительно простой формы. Это так называемые диаграммы Юнга.

Диаграмма Юнга со строками $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(0 < b_1 \leqslant \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_m)$ — это доска, горизонтали которой выровнены по левому краю и содержат соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_m$ клеток (снизу вверх). Иногда мы будем считать, что диаграмма Юнга может иметь нулевые строки. На рис. 3 изображены две диаграммы Юнга: квадрат 4×4 (*а*) и диаграмма Юнга со строками 1, 3, 5, 7 (*б*).



а) *б*)

Рис. 3

В заключение этого параграфа приведём нетривиальный пример двух эквивалентных досок.

2. Докажите, что доски, изображённые на рис. 3, *а*, *б*, эквивалентны!

* * *

Теорема I. Квадратная доска $n\times n$ эквивалентна доске Y_n в форме диаграммы Юнга с длинами строк 1, 3, 5, ..., $2n-1$.

Доказательство. Обозначим квадрат $n\times n$ через K_n. Мы построим по индукции взаимно однозначное соответствие между расстановками ладей в K_n и в Y_n, следуя А. Левиту.

База индукции $n=1$ очевидна. Докажем индукционный переход. Разобьём квадрат K_n на две части: квадрат K_{n-1} и «рамку», состоящую из $2n-1$ клеток. Треугольную доску Y_n тоже разобьём на две части: доску Y_{n-1} и самую длинную горизонталь (тоже из $2n-1$ клеток). Допустим, что совпадение ладейных чисел квадрата K_{n-1} и треугольника Y_{n-1} уже установлено. Тогда можно считать, что построено соответствие между расстановками ладей в квадрате $n\times n$, в которых все ладьи находятся в выделенной части $(n-1)\times(n-1)$, и расстановками ладей в Y_n, в которых все ладьи находятся в выделенной части Y_{n-1}. Осталось построить соответствие между расстановками ладей в Y_n, которые содержат ладью на длинной горизонтали, и расстановками ладей в K_n, которые содержат ладьи в «рамке». Рассмотрим все расстановки k ладей в Y_n, содержащие ладью в длинной строке, у которых расстановка $k-1$ ладей в Y_{n-1} фиксирована, назовём её s, а соответствующую ей расстановку в K_{n-1} назовём t. Всего имеется $2n-k=n+(n-k)$ таких расстановок, поскольку в длинной строке ровно столько подходящих для последней ладьи клеток. Пронумеруем как-нибудь эти клетки (рис. 4).

Если ладья стоит на клетке с номером l, $1\leqslant l\leqslant n$, то поставим ладью на l-ю клетку вертикальной стороны рамки в K_n, вычеркнем мысленно вертикаль и горизонталь, содержащие поставленную ладью, и на оставшейся части доски (которая представляет собой «раздвинутый» квадрат K_{n-1}, очевидно, у него ладейные числа такие же, как у K_{n-1}) реализуем расстановку t (рис. 5).

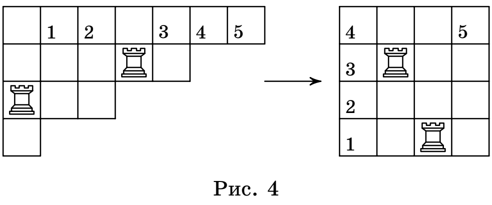


Рис. 4

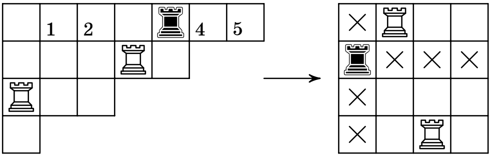


Рис. 5

Если же ладья стоит на клетке с номером $l>n$ (таких номеров имеется $n-k$), то реализуем расстановку t в стандартном квадрате K_{n-1}. Заметим, что среди $n-1$ клеток «рамки», расположенных над K_{n-1}, есть ровно $n-k$ мест, куда можно было бы поставить ладью. Ну так и поставим ладью на $(l-n)$-е из этих мест (рис. 6).

Построенное соответствие является взаимно однозначным. Действительно, нетрудно предъявить обратное отображение. Если в «рамке» квадрата K_n не стоит ни одной ладьи, следует воспользоваться взаимно однозначным отображением, которое существует по индукционному предположению. Если имеется ладья, стоящая в первом столбце, следует вычеркнуть её вместе с вертикалью и горизонталью, которые она занимает, и для оставшейся фигуры («раздвинутый» квадрат K_{n-1}) опять воспользоваться индукционным предположением. Если же в первом столбце ладьи нет, но есть ладья в первой строке, следует мысленно удалить рамку, воспользовавшись индукционным отображением, расположить ладей в диаграмме $Y_{n-1}\subset Y_n$ и добавить ладью в самую длинную строчку диаграммы Y_n на подходящее место.

З а м е ч а н и е. Как мы отмечали, число $r_1(B)$ равно площади доски B. Поэтому, доказав утверждение теоремы I, мы получили также (не самое простое, зато о ч е н ь комбинаторное) доказательство равенства

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2.$$

3. Разглядывая рис. 4—6, докажите, что

$$r_k(K_n)=r_k(K_{n-1})+(2n-k)\,r_{k-1}(K_{n-1})\,.$$

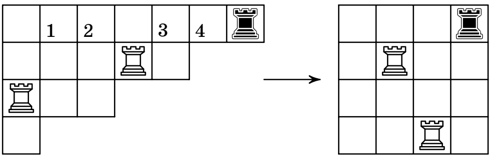


Рис. 6

§ 2. КОМБИНАТОРНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ЛАДЕЙНЫМИ ЧИСЛАМИ

Докажем несколько неравенств с ладейными числами. Будем считать, что фиксирована произвольная доска B. Говоря о расстановке небьющих друг друга ладей, мы часто для краткости будем опускать слова «друг друга».

Неравенство 1. $C_{k+m}^{k} r_{k+m} \leqslant r_m r_k$.

Доказательство. Число $r_m r_k$ имеет ясный комбинаторный смысл: это количество способов разместить на доске k белых и m чёрных ладей так, чтобы белые ладьи не били белых, а чёрные — чёрных; при этом на любую клетку разрешается ставить две ладьи, если они разного цвета. Заметим, что из каждой расстановки $k+m$ небьющих ладей можно получить расстановку из k белых небьющих ладей и m чёрных небьющих ладей — нужно просто выбрать, какие ладьи будут белыми (это можно сделать как раз C_{k+m}^{k} способами), а остальные ладьи пусть будут чёрными. Разным исходным расстановкам и разным способам выборки соответствуют разные пары наборов белых и чёрных ладей, итого — $C_{k+m}^{k} r_{k+m}$ пар. Но, конечно же, таким способом мы можем получить далеко не все наборы белых и чёрных ладей, поскольку мы заведомо не получим таких наборов, где имеются чёрная и белая ладьи, стоящие на одной клетке.

4. Докажите неравенство $18\,480 r_{12} \leqslant r_9^2$ (не будем скрывать от читателя, что $18\,480 = C_{12}^{6} \cdot C_{6}^{3}$).

* * *

Неравенство 2. $k^{k-2} r_k \leqslant C_{r_2}^{k-1}$ при $1 \leqslant k \leqslant n$.

Доказательство. Для любого множества A из k небьющих ладей построим всевозможные такие наборы из $k-1$ пар небьющих ладей, что все ладьи в этих парах принадлежат A и каждая ладья из A входит хотя бы в одну пару. Это можно сделать многими способами. Чтобы подсчитать это число способов, заметим, что любые k небьющих ладей можно считать упорядоченными, например, по расположению их горизонталей сверху вниз. Тогда каждому способу выбора $k-1$ пар небьющих ладей можно сопоставить граф, в котором имеется k помеченных вершин, соответствующих ладьям, и $k-1$ рёбер, соответствующих выбираемым парам. Этот граф будет, вообще говоря, несвязным; нетрудно видеть, что в нём не может быть изолированных вершин. Пусть N_k — число графов, состоящих из k неизолированных помеченных вершин и $k-1$ рёбер. Далеко не всякий набор из $k-1$ пар ладей может быть получен таким образом, хотя бы потому, что в *наших* наборах общее число ладей равно k, а в произвольном наборе их количество может быть и другим. Следовательно, мы получаем неравенство

$$N_k r_k \leqslant C_{r_2}^{k-1}.$$

По-видимому, для чисел N_k нет хорошей формулы, подробности (в том числе, описание производящей функции) можно прочитать в статье [4]. Для завершения доказательства заметим, что $N_k \geqslant k^{k-2}$, так как последняя величина выражает количество деревьев с k помеченными вершинами (это утверждение знаменитой теоремы Кэли).

* * *

Неравенства, которые мы сейчас рассмотрели, — грубые, поскольку не используют «геометрию» доски. Действительно, при доказательстве этих неравенств мы пользовались теоретико-множественными соображениями и никак не учитывали взаиморасположение ладей. Поэтому доказанные неравенства верны в следующей более общей ситуации. Пусть дано произвольное конечное множество A. Пусть S — некоторое свойство подмножеств множества A, удовлетворяющее условию монотонности: если множество $B \subset A$ удовлетворяет свойству S, то и любое подмножество $B' \subset B$ также удовлетворяет свойству S.

Например, пусть A — произвольное множество натуральных чисел, а S — свойство «произведение данных чисел нечётно» (или, скажем, свободно от квадратов). В применении к ладейным числам, A — это множество клеток доски, S — свойство «все клетки данного подмножества ладейно независимы» (т. е. каждая вертикаль и горизонталь содержат не более одной клетки из множества S). Пусть r_k — количество k-элементных подмножеств множества A, удовлетворяющих свойству S. Тогда величины r_k удовлетворяют неравенствам 1 и 2.

Следующее неравенство значительно тоньше.

Неравенство 3. $r_{k-1} r_{k+1} \leqslant r_k^2$.

Доказательство. Опять воспользуемся комбинаторным смыслом обеих частей неравенства: $r_{k-1} r_{k+1}$ — это количество способов поставить на доску $k-1$ чёрных небьющих ладей и $k+1$ белых небьющих ладей так, что ладьи разных цветов могут стоять на одной клетке; r_k^2 — это количество аналогичных расстановок k чёрных и k белых ладей.

Фиксируем произвольный набор C из $2k-m$ клеток доски, $0 \leqslant m \leqslant k$. Пусть p_C — количество расстановок $k-1$ чёрных и $k+1$ белых ладей, в которых все клетки из C заняты ладьями, назовём эти расстановки расстановками первого типа, будем считать, что $p_C = 0$ при $m = k$; q_C — количество расстановок k чёрных

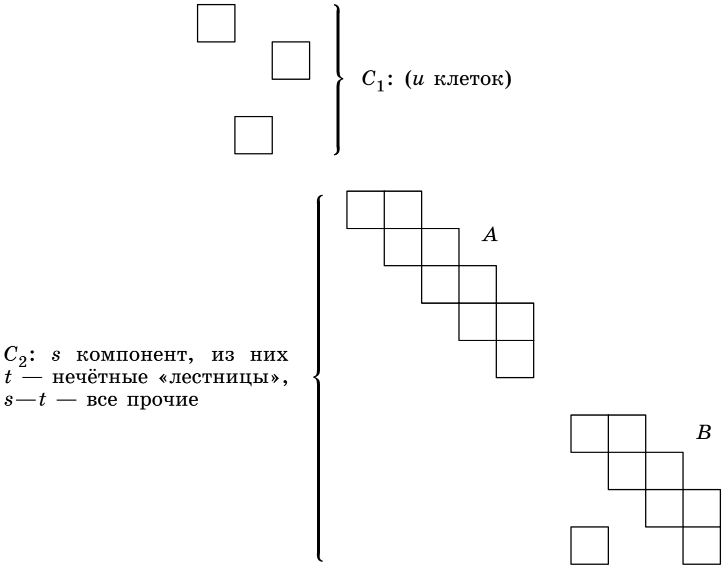


Рис. 7

и k белых небьющих ладей на C, в которых все клетки из C заняты ладьями — расстановки второго типа. Докажем, что $p_C \leqslant q_C$ для каждого множества C из $2k-m$ клеток, $0 \leqslant m \leqslant k$. Из этого утверждения сразу следует требуемое неравенство.

Пусть $C = C_1 \cup C_2$, где C_1 — объединение всех одноклеточных компонент связности (по отношению к ходу ладьи) множества C, $C_2 = C \setminus C_1$. Пусть часть C_1 содержит u клеток.

Для того чтобы на доске C можно было разместить хотя бы одну расстановку первого или второго типа, необходимо, чтобы в каждой вертикали и каждой горизонтали содержалось не более двух клеток доски C. Это значит, что достаточно рассматривать только такие доски C, в которых все неодноклеточные компоненты связности имеют вид «лестничных диаграмм» или их «циклических замыканий» (компоненты A и B на рис. 7), для остальных досок C выполняется $p_C = q_C = 0$. Пусть имеется s неодноклеточных компонент связности, $C_2 = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_s$ — разбиение части C_2 на компоненты связности, пусть t — количество лестничных диаграмм с нечётным числом клеток среди них (см. рис. 7).

Рассмотрим расстановки первого типа, в которых все клетки доски C заняты. Очевидно, что в m клетках доски C должны стоять по две ладьи, а в остальных $2k-2m$ клетках — по одной. Заметим, что все m клеток с двумя ладьями обязательно должны располагаться в части C_1. Поэтому, чтобы построить произвольную расстановку первого типа, мы сначала выберем m клеток среди u клеток части C_1, а оставшиеся клетки доски C раскрасим в два цвета так, чтобы ладьи, стоящие на клетках одного цвета, не били друг друга. Заметим, что для каждой «циклической лестничной диаграммы», а также для лестничной диаграммы с чётным числом клеток существует ровно две такие раскраски, причём чёрных и белых клеток в этих раскрасках поровну, а для лестничной диаграммы с нечётным числом клеток (в том числе, одноклеточной) существуют также две раскраски, причём в одной из них чёрных клеток будет на единицу больше, чем белых, сопоставим такой диаграмме значение $+1$, а в другой — наоборот, белых клеток будет больше чем чёрных, сопоставим такой диаграмме значение -1.

Выбор раскраски состоит теперь в том, что мы должны выбрать одну из двух возможностей для каждой компоненты D_i и каждой из $u-m$ невыбранных клеток части C_1, причём сумма значений выбранных раскрасок для всех лестничных диаграмм с нечётным числом клеток должна быть равна -2 (чтобы чёрных клеток получилось на две меньше, чем белых). Последнее, кстати, возможно только в том случае когда число $u-m+t$ чётно. Итак, количество расстановок первого типа, в которых все клетки доски C заняты, равно

$$p_C = C_u^m 2^{s-t} C_{u-m+t}^{\frac{u-m+t}{2}-1}.$$

Здесь C_u^m — это число способов выбрать m клеток из u клеток части C_1, 2^{s-t} — это количество способов выбрать раскраску в компонентах вида «циклическая лестничная диаграмма» и «лестничная диаграмма с чётным числом клеток», $C_{u-m+t}^{\frac{u-m+t}{2}-1}$ — количество способов выбрать расстановку знаков у набора из $u-m+t$ единиц так, чтобы сумма полученных чисел со знаками была равна -2.

По аналогичным соображениям число расстановок второго типа для той же доски C равно

$$q_C = C_u^m 2^{s-t} C_{u-m+t}^{\frac{u-m+t}{2}},$$

и мы видим, что оно не меньше числа расстановок первого типа. Неравенство доказано.

Как видим, доказательство неравенства 3 громоздко, требуются заметные усилия, чтобы его понять. Замечательно, что позже мы сумеем дать значительно более простое аналитическое доказательство этого неравенства и даже усилить его!

§ 3. ЛАДЕЙНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

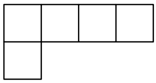
Выражение

$$R(x, B) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n x^n$$

называется *ладейным многочленом* доски B.

Говоря более серьёзным языком, ладейный многочлен — это производящая функция последовательности ладейных чисел данной доски. Это и в самом деле многочлен, поскольку, как мы уже отмечали, при больших n ладейные числа любой доски равны нулю, и сумма в определении ладейного многочлена на самом деле конечная. Так, например,

$$R\left(x, \quad \right) = 3x^2 + 5x + 1$$



(это мы знаем из таблицы рис. 2).

В чём идея использования ладейных многочленов (или вообще производящих функций)? Отталкиваясь от комбинаторных размышлений о ладейных числах, мы сможем установить какие-то свойства ладейных многочленов. Эти свойства уже будут выражены алгебраическим, а не комбинаторным языком. Это позволит нам вывести новые алгебраические свойства и получить из них новые, ранее неизвестные, свойства ладейных чисел.

Докажем несколько свойств ладейных многочленов.

Лемма II. Пусть имеется доска B и c — произвольная клетка доски B. Пусть Крест(c) — это множество клеток доски B, лежащих на той же горизонтали или в той же вертикали, что и клетка c. Тогда

$$R(x, B) = R(x, B \setminus c) + x\, R(x, B \setminus \text{Крест}(c)). \tag{2}$$

Доказательство. Многие равенства с производящими функциями доказываются сравнением коэффициентов в левой и правой части при одинаковых степенях x. Так, коэффициент при x^k в левой части равен $r_k(B)$, а коэффициент при x^k в правой части равен $r_k(B \setminus c) + r_{k-1}(B \setminus \text{Крест}(c))$. Таким образом, нам нужно проверить равенство

$$r_k(B) = r_k(B \setminus c) + r_{k-1}(B \setminus \text{Крест}(c)). \tag{3}$$

Это в точности рекуррентное соотношение, установленное в лемме I.

Лемма III. Пусть доска B представляет собой объединение двух не связанных ходом ладьи частей B_1 и B_2, тогда

$$R(x, B) = R(x, B_1)\, R(x, B_2). \tag{4}$$

Доказательство. Если нам нужно расставить n ладей, и мы решили поставить k из них в часть B_1, а остальные — в часть B_2, то всего найдётся $r_k(B_1)r_{n-k}(B_2)$ таких расстановок. Значит,

$$r_n(B)=\sum_{k=0}^{n} r_k(B_1)\, r_{n-k}(B_2). \tag{5}$$

Осталось заметить, что коэффициент при x^n многочлена $R(x, B_1)\times$ $\times R(x, B_2)$ равен той же самой сумме.

Доказанные два свойства ладейных многочленов выглядят совершенно естественными — эти свойства отвечают на вопросы: как изменится ладейный многочлен, если из доски удалить одну клетку, и как выглядит ладейный многочлен для доски, состоящей из двух «ладейно независимых» частей. Заметим, что рекуррентное соотношение (2) для ладейных многочленов ничуть не сложнее, чем эквивалентная ему формула (3), а соотношение (4) выглядит даже проще чем соответствующая формула (5) для ладейных чисел.

5. Пусть $R_{m,n}(x)$ — ладейный многочлен прямоугольника $m\times n$. Докажите, что

$$R_{m,n}(x)=R_{m-1,n}(x)+nx\, R_{m-1,n-1}(x).$$

6. Пусть l — произвольная горизонталь доски B; c_1, c_2, ..., c_k — все клетки доски B, лежащие на этой горизонтали l; B_l — доска, получающаяся из B вычёркиванием горизонтали l; B_i — доска, получающаяся из B вычёркиванием горизонтали l и вертикали, содержащей клетку c_i. Тогда

$$R(x, B)=R(x, B_l)+x\sum_{i=1}^{k} B(x, B_i). \tag{6}$$

Следующее свойство, которое мы хотим доказать, уже не столь прозрачно. Впервые оно появилось в статье [5] и, судя по всему, было придумано не как попытка дать ответ на какой-нибудь вопрос о досках, а как попытка истолковать какое-либо несложное комбинаторное соображение, вроде тех, что встречались в доказательствах предыдущих лемм, на языке дифференциальных соотношений. Зачем? Об этом чуть позже.

Лемма IV. Пусть d_n — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, D_n — диаграмма Юнга со строками d_1, d_2, ..., d_n. Пусть

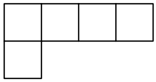
$$q_n(x)=x^{d_{n+1}}e^x R\left(\frac{1}{x}, D_n\right).$$

Тогда

$$q_n(x)=x^{d_{n+1}-d_n}q'_{n-1}(x), \tag{7}$$

где $q'_{n-1}(x)$ — производная функции по переменной x.

Замечание. Определение функций q_n не так уж страшно, как кажется на первый взгляд. Рассмотрим, например, последовательность $d_1=1$, $d_2=4$, $d_3=6$, ... Тогда D_2 — это уже встречавшаяся нам диаграмма

 ,

и

$$x^{d_3}R\left(\frac{1}{x},\, D_2\right)=x^6\left(1+5\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\frac{3}{x^2}\right)=x^4(x^2+5x+3).$$

Таким образом, функция $x^{d_{n+1}}R\left(\frac{1}{x},\, D_n\right)$ — это «ладейный многочлен наоборот»: его коэффициенты — это всё те же ладейные числа, только расположенные не в порядке возрастания номеров, а в порядке убывания.

Доказательство леммы IV. Приравнивая коэффициенты при $x^{d_{n+1}-k}$ в левой и правой части, получаем, что требуется доказать равенство

$$r_k(D_n)=r_k(D_{n-1})+(d_n-k+1)\, r_{k-1}(D_{n-1}).$$

Это тождество выражает тот факт, что, расставляя k ладей на доске D_n, мы можем либо разместить их все в D_{n-1}, либо разместить $k-1$ ладью в D_{n-1}, а последнюю ладью поставить в самой длинной строчке на одно из d_n-k+1 допустимых мест.

Замечание, которое мы сделали после формулировки леммы IV, наводит на мысль, что свобода в определении разных математических объектов может и должна быть использована для достижения различных целей. Рассмотрим, например, следующую модификацию определения ладейного многочлена.

Пусть k — натуральное число. Введём обозначение

$$x^{\underline{k}}=x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1).$$

Кроме того, положим $x^{\underline{0}}=1$. Пусть степень обычного ладейного многочлена доски B равна m. Модифицированный ладейный многочлен доски B определим как функцию

$$\overline{R}(x,\, B)=\sum_{k=0}^{m} r_k(B)x^{\underline{k}}.$$

Следующая теорема (которую мы почерпнули в книге [2]) даёт явное описание модифицированного ладейного многочлена любой диаграммы Юнга. Точнее говоря, в формулировке теоремы использована функция чуть более общего вида, чем модифицированный ладейный многочлен, поскольку при определении последнего мы учитывали степень m ладейного многочлена, а в формулировке теоремы в качестве m используется число, которое может быть больше или равно этой степени.

Теорема II. Пусть B — диаграмма Юнга со строками b_1, b_2, ..., b_m ($0\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_m$; как видите, разрешены нулевые строки). Тогда

$$\overline{R}(x, B)=\sum_{k=0}^{m} r_k(B)x^{\underline{k}}=$$
$$=(x+b_1)(x+b_2-1)(x+b_3-2)\ldots(x+b_m-m+1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что доказываемое равенство выполнено для всякого натурального $x\geqslant m$. Перепишем его в виде

$$\sum_{k=0}^{m} r_k(B)\frac{x!}{(x-m+k)!}=(x+b_1)(x+b_2-1)(x+b_3-2)\ldots(x+b_m-m+1).$$

На самом деле обе части этого равенства равны количеству расстановок m небьющих ладей на диаграмме Юнга со строками b_1+x, b_2+x, ..., b_m+x. Для правой части это так, поскольку мы можем выбрать место для ладьи в первой строке b_1+x способами, после этого место для ладьи во второй строке b_2+x-1 способами и т. д. Левая часть выражает другой способ подсчёта. Считая, что доска представляет собой объединение прямоугольника $x\times m$ и исходной диаграммы B, поставим k небьющих ладей на часть B. Это можно сделать $r_k(B)$ способами. Чтобы разместить остальных ладей в прямоугольной части, мы выбираем место для первой ладьи в первой свободной строке (x способов), затем выбираем место для второй ладьи во второй свободной строке ($x-1$ способов) и т. д., всего $\dfrac{x!}{(x-m+k)!}$ способов.

Итак, левая и правая часть совпадают при бесконечно многих значениях x. Поскольку обе части равенства являются многочленами по переменной x, они совпадают тождественно.

Пользуясь теоремой II, мы можем ответить, например, на такой «топологический» вопрос: ладейные числа некоторой доски B равны $r_0=1$, $r_1=9$, $r_2=17$, $r_3=8$, $r_4=1$; можно ли утверждать, что эта доска не имеет форму диаграммы Юнга? Да, мы можем это утверждать, потому что модифицированный ладейный многочлен этой доски

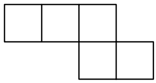
$$\overline{R}(x, B)=x(x-1)(x-2)(x-3)+9x(x-1)(x-2)+$$
$$+17x(x-1)+8x+1=1+3x+x^2+3x^3+x^4$$

не имеет целых корней. Чуть позже, пользуясь неравенством 7 или теоремой IV, мы сможем доказать, что такой доски вообще не существует.

Следствие II-А. Квадратная доска $n \times n$ эквивалентна доске Y_n в форме диаграммы Юнга с длинами строк 1, 3, 5, ..., $2n-1$.

Следствие II-Б. Всякая диаграмма Юнга эквивалентна диаграмме Юнга с попарно различными строками.

Мы предлагаем читателю самому вывести эти следствия из утверждения теоремы II. Отметим, что следствие II-А — это в точности теорема I, а утверждение второго следствия нам ещё не встречалось. Таким образом, пользуясь модифицированными ладейными многочленами, мы обнаружили что-то новенькое. Кстати, для произвольных досок модифицированный ладейный многочлен вообще может не иметь целых корней. Это видно хотя бы на примере доски

$B=$  .

Здесь $\overline{R}(x, B)=x^2+4x+5$.

§ 4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА С ЛАДЕЙНЫМИ ЧИСЛАМИ

Теперь наконец-то мы можем сформулировать основную теорему о ладейных многочленах.

Теорема III. Ладейный многочлен диаграммы Юнга с n попарно различными строками имеет ровно n вещественных (отрицательных) корней.

Доказательство. Ладейный многочлен диаграммы Юнга с n попарно различными строками имеет степень n. Поэтому достаточно проверить, что функция $q_n(x)$, определённая в лемме IV, имеет n вещественных отрицательных корней. Это легко проверяется по индукции. При $n=1$ имеем: $R(x, B_1)=1+d_1x$, $q_1(x)=$ $=e^x(x^{d_2}+d_1x^{d_2-1})$. Как видим, функция q_1 имеет отрицательный корень, обозначим его x_0, кроме того $q(0)=q(-\infty)=0$. Это значит, что функция $q_1'(x)$ имеет не менее двух отрицательных корней — хотя бы один на промежутке $(-\infty, x_0)$ и ещё один на промежутке $(x_0, 0)$ (это следует из теоремы Ролля). По формуле (7) отсюда следует, что функция $q_2(x)$ имеет не менее двух отрицательных корней (а больше двух, как следует из свойств $R(x, D_2)$, она иметь не может, значит, их ровно два). Кроме того, опять $q_2(0)=q_2(-\infty)=0$. Значит, q_3 имеет не менее трёх вещественных корней, и т. д.

Следствие III-А. Все корни ладейного многочлена произвольной диаграммы Юнга — вещественные (отрицательные) числа.

Доказательство. Действительно, благодаря следствию II-Б мы знаем, что любая диаграмма Юнга эквивалентна диаграмме Юнга с попарно различными строками. Тогда утверждение сразу следует из теоремы III.

Технически чуть более сложным рассуждением в статье [6] доказана совсем уж общая теорема.

Теорема IV. Все корни ладейного многочлена произвольной доски — вещественные (отрицательные) числа.

Доказательство. Будем говорить, что многочлен g *разделяет корни* многочлена f, если

1) $\deg g = \deg f$ или $\deg g = \deg f - 1$;

2) все корни многочленов f и g — вещественные отрицательные, $f(0) > 0$, $g(0) > 0$;

3) если $0 > x_1 > x_2 > \ldots$ — корни многочлена f, $0 > y_1 > y_2 > \ldots$ — корни многочлена g, то $0 > x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots$

Лемма V. Проверим, что если многочлены $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, разделяют корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ разделяет корни

$$f(x) + x \sum_{i=1}^{k} g_i(x).$$

Обозначим $F(x) = f(x) + x \sum_{i=1}^{k} g_i(x)$. Из свойств 2) и 3) разделения корней следует, что старшие коэффициенты многочленов f и g_i положительны и $f(x) > 0$, $g_i(x) > 0$ при $x > 0$. Значит, степень F равна или на единицу больше степени f, и у F нет положительных корней. Далее, если $0 > x_1 > x_2 > \ldots$ — корни многочлена f, то из свойства разделения корней следует, что $F(x_1) < 0$, $F(x_2) > 0$, $F(x_3) < 0$ и т. д. Следовательно, у многочлена F имеется корень на каждом из промежутков $(x_1, 0)$, (x_2, x_1), (x_3, x_2), $\ldots$, а если $\deg F = \deg f + 1$, то ещё и на промежутке $(-\infty, x_{\deg f})$, причём на каждом из упомянутых промежутков есть ровно один корень. Значит, f разделяет корни F. Лемма доказана

Вернёмся к доказательству теоремы. Докажем индукцией по площади доски B, что ладейный многочлен доски B', полученной из B вычёркиванием строки или столбца, разделяет корни ладейного многочлена доски B. Для доски, состоящей из одной или двух клеток, это утверждение очевидно. Если для досок, не превосходящих по площади $n-1$, утверждение задачи уже установлено, то, благодаря соотношению (6) и утверждению леммы V, мы сразу получаем, что многочлен $R(x, B_l)$ разделяет корни многочлена $R(x, B)$ (для столбцов аналогично).

Утверждение теоремы IV является частью доказанного утверждения.

Итак, ладейный многочлен любой доски B имеет только вещественные корни. Это означает, что ладейный многочлен — очень специальное и редкое явление во множестве всех многочленов. В частности, это значит, что ладейный многочлен любой доски может быть разложен на линейные множители:

$$r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \ldots + r_0 = r_n (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n),$$

где все числа a_i — вещественны. Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при x^k, мы получаем, что

$$\frac{r_k}{r_n} = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}. \tag{8}$$

Здесь в правой части написана сумма всевозможных произведений, составленных из k сомножителей.

Что дают эти наблюдения для доказательства неравенств с ладейными числами? Докажем ещё раз неравенство 3: $r_{k-1} r_{k+1} \leqslant r_k^2$ для любой доски B.

Второе доказательство неравенства 3. Воспользуемся формулой (8). Поскольку доказываемое неравенство однородно, можно считать, что $r_n = 1$. Тогда выражение $r_{k-1} r_{k+1} - r_k^2$ состоит из слагаемых вида $a_{j_1}^2 a_{j_2}^2 \ldots a_{j_s}^2 a_{j_{s+1}} \ldots a_{j_{k+s}}$, причём каждое такое слагаемое входит с коэффициентом $C_{2s}^{s-1} - C_{2s}^{s} < 0$.

Для симметрических функций известно много других неравенств. Все они могут быть записаны как неравенства о ладейных числах! Мы приведём несколько таких неравенств. Доказательства и технические подробности можно прочитать в книге [3].

Неравенство 4.

$$\frac{r_{k+m}}{C_n^{k+m}} \leqslant \frac{r_k}{C_n^k} \frac{r_m}{C_n^m}.$$

Так как $C_n^k C_n^m \geqslant C_n^{k+m} C_{k+m}^k$, то это неравенство сильнее неравенства 1.

Неравенство 5 (неравенство Ньютона).

$$\frac{r_{k-1}}{C_n^{k-1}} \frac{r_{k+1}}{C_n^{k+1}} \leqslant \left(\frac{r_k}{C_n^k}\right)^2.$$

Это неравенство сильнее неравенства 3, поскольку его можно записать в виде

$$r_{k-1} r_{k+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{n-k}\right) \leqslant r_k^2.$$

Неравенство 6 (неравенство о симметрических средних). Если степень ладейного многочлена равна n, то при $0 \leqslant m < k \leqslant n$

$$\left(\frac{r_k}{C_n^k}\right)^{1/k} \leqslant \left(\frac{r_m}{C_n^m}\right)^{1/m}.$$

§ 5. ЕЩЁ ОДНО НЕРАВЕНСТВО

В предыдущем параграфе мы обнаружили метод генерации неравенств с ладейными числами. К сожалению, с его помощью не удаётся доказать все неравенства с ладейными числами. Приведём напоследок пример комбинаторного неравенства, которое не следует из результатов предыдущего параграфа.

Посмотрим ещё раз на неравенство 3. Запишем его в таком виде:

$$\frac{\ln r_{k-1}+\ln r_{k+1}}{2}\leqslant\ln r_k.$$

Последовательность x_n, удовлетворяющая свойству

$$\frac{x_{k-1}+x_{k+1}}{2}\leqslant x_k,$$

называется выпуклой вверх или вогнутой. Её график — «выпуклое множество» (правда, дискретное). Он состоит из возрастающего участка за которым, быть может, следует убывающий. Таким образом, график последовательности ладейных чисел представляет собой «подъём» или «холмик». Следующее неравенство показывает, что этот холмик перекошен вправо.

Неравенство 7. Если степень ладейного многочлена доски B равна n, то

$$r_k\leqslant r_{n-k},\quad 0\leqslant k\leqslant n/2.$$

Доказательство. Так как $r_n\geqslant 1$, то $r_n\geqslant r_0$. Выберем любую из расстановок n небьющих ладей на доске B. Переставив при необходимости строки и столбцы, мы можем считать, что эти ладьи расположены на одной диагонали D. Очевидно, эта диагональ содержит ровно n клеток, принадлежащих доске B.

Зафиксируем k, $1\leqslant k<n/2$. Возьмём произвольное k_1, $1\leqslant k_1\leqslant$ $\leqslant k$, и фиксируем любое расположение k_1 небьющих ладей вне диагонали D. Пусть эти ладьи бьют m клеток диагонали D, $k_1+1\leqslant$ $\leqslant m\leqslant 2k_1$. Тогда количество расстановок k ладей, в которых вне диагонали D стоит k_1 ладей, причём в точности на выбранных местах, равно $C_{n-m}^{k-k_1}$. А количество расстановок $n-k$ ладей, в которых вне диагонали D стоит k_1 ладей, причём в точности на выбранных местах, равно $C_{n-m}^{n-k-k_1}$.

Осталось заметить, что при выбранных значениях параметров k, k_1, m последний биномиальный коэффициент расположен в $(n-m)$-й строке треугольника Паскаля ближе к центру, чем предпоследний, поэтому

$$C_{n-m}^{n-k-k_1}\geqslant C_{n-m}^{k-k_1}.$$

Таким образом, количество всех расстановок $n-k$ ладей не меньше количества всех расстановок k ладей.

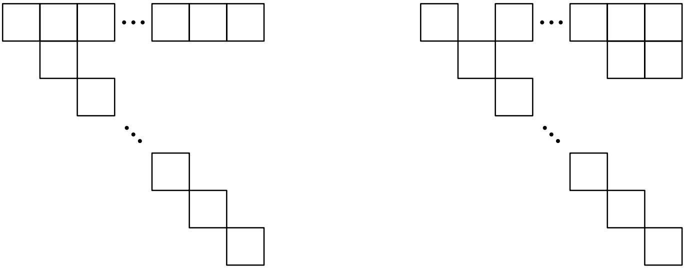


Рис. 8

Доказанное неравенство не следует из теоремы IV, поскольку, как мы уже обсуждали, все корни «ладейного многочлена наоборот»

$$r_n + r_{n-1}x + \ldots + r_0 x^n = x^n R\left(\frac{1}{x}\right)$$

тоже вещественные отрицательные.

Нетрудно привести пример доски, для которой при всех k в неравенстве 7 реализуется равенство. Действительно, равенства будут иметь место, если в доказательстве неравенства 7 окажется $m = 2k_1$, т. е. если любые k_1 небьющих ладей ($k_1 \leqslant n/2$), расположенных вне диагонали D, бьют ровно $2k_1$ клеток этой диагонали. Примеры таких досок для чётного и нечётного n изображены на рис. 8.

Аналогичными рассуждениями можно установить следующее неравенство.

7. Если степень ладейного многочлена доски B равна n, то

$$\frac{n-k}{k+1} \cdot r_k \leqslant r_{n-k-1}, \quad 0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Гик. Шахматы и математика. — М.: Наука, 1983. — (Библиотечка «Квант». Вып. 24).

[2] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. — М.: Мир, 1990.

[3] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.

[4] E. N. Gilbert. Enumeration of labelled graphs // Canad. J. Math. V. 8. 1956. P. 405—411.

[5] J. L. Goldman, J. T. Joichi, D. E. White. Rook theory III: rook polynomials and the chromatic structure of graphs // Journal of Comb. Theory. Ser. B. V. 25. 1978. P. 135—142.

[6] A. Nijenhuis. On permanents and the zeros of rook polynomials // Journal of Comb. Theory. Ser. A. V. 21. 1976. P. 240—244.